अध्याय 12

रैखिक प्रोग्रामन

12.1 समग्र अवलोकन (Overview)

12.1.1 *एक इष्टतमीकरण समस्या*

ऐसी समस्या जिसमें किसी फलन का अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण करना हो, एक इष्टतमीकरण समस्या कहलाती है। एक इष्टतमीकरण समस्या लाभ, उत्पादन आदि को अधिकतमीकरण या उपलब्ध साधनों से मूल्य आदि के न्यूनतमीकरण से सबंधित होती है।

12.1.2 *रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ (LPP)*

एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या दो चरों (मान लीजिए x तथा y) वाले किसी रैखिक फलन जो उद्देश्य फलन कहलाता है, के इष्टतमीकरण (अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण) से सबंधित होती है, इस प्रतिबंध के साथ कि चर ऋणेतर हों तथा वे किसी रैखिक असमिकाओं के समुच्चय (जो रैखिक व्यवरोध कहलाते हैं) को संतुष्ट करें।

रैखिक प्रोग्रामन समस्या एक विशेष प्रकार की इष्टतमीकरण समस्या होती है।

12.1.3 *उद्देश्य फलन* रैखिक फलन $Z = ax + by$, जहाँ a तथा b अचर हैं, जिसका अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण करना होता है, एक रैखिक उद्देश्य फलन कहलाता हैं।

12.1.4 *निर्णय चर* उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ में x तथा y निर्णय चर कहलाते हैं।

12.1.5 *व्यवरोध* किसी LPP के चरों पर रैखिक असमिकाओं या प्रतिबंधों को व्यवरोध कहते हैं। प्रतिबंध $x \geq 0, y \geq 0$ ऋणेतर व्यवरोध कहलाते हैं।

12.1.6 *सुसंगत क्षेत्र* ऋणेतर व्यवरोध $x \geq 0, y \geq 0$ सहित किसी LPP के सभी व्यवरोधों द्वारा निर्धारित उभयनिष्ठ क्षेत्र, समस्या का सुसंगत क्षेत्र कहलाता है।

12.1.7 *सुसंगत हल* किसी LPP के सुसंगत क्षेत्र के सभी अंत: बिंदु, सुसंगत हल को निरूपित करते हैं।

12.1.8 *असुसंगत हल* सुसंगत क्षेत्र के बाहर का कोई भी बिंदु असुसंगत हल कहलाता है।

12.1.9 *इष्टतम (सुसंगत) हल* सुसंगत क्षेत्र में कोई भी बिंदु जो उद्देश्य फलन का इष्टतम (अधिकतम या न्यूनतम) मान देता हो एक इष्टतम हल कहलाता है।

निम्नलिखित प्रमेय LPPs को हल करने के लिए आधारभूत हैं।

12.1.10 *प्रमेय 1* मान लीजिए कि किसी LPP का सुसंगत क्षेत्र (उत्तल बहुभुज) R है तथा मान लीजिए कि $Z = ax + by$ उद्देश्य फलन है। जब Z का इष्टतम (अधिकतम या न्यूनतम) मान होता है, जहाँ चर x तथा y रैखिक असमिकाओं द्वारा वर्णित या अवरोधों के आधीन हैं, तब यह इष्टतम मान अनिवार्यत: सुसंगत क्षेत्र के कोने के बिंदु (शीर्ष) पर घटित होना चाहिए।

प्रमेय 2 मान लीजिए कि किसी LPP का सुसगंत क्षेत्र R है तथा $Z = ax + by$ उद्देश्य फलन है। यदि R एक परिबद्ध क्षेत्र है तो उद्देश्य फलन Z के R में अधिकतम तथा न्यूनतम दोनों ही मान होते हैं और इनमें से प्रत्येक R के किसी कोनीय बिंदु पर पाया जाता है।

यदि R एक अपरिबद्ध क्षेत्र है, तो उद्देश्य फलन के एक अधिकतम या न्यूनतम मान का अस्तित्व हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है। किंतु, यदि उसका अस्तित्व है, तो वह R के किसी कोनीय बिंदु पर ही होना चाहिए।

12.1.11 *LPP को हल करने की कोनीय बिंदु विधि*

इस विधि के निम्नलिखित चरण हैं:

(1) LPP का सुसंगत क्षेत्र ज्ञात कीजिए और उसके कोनीय बिंदुओं (शीर्षों) का निर्धारण या तो निरीक्षण द्वारा अथवा उस बिंदु पर प्रतिच्छेद करने वाली दो रेखाओं के समीकरणों के हल द्वारा कीजिए।

(2) उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का मान प्रत्येक कोनीय बिंदु पर ज्ञात कीजिए। मान लीजिए कि M तथा m, क्रमश:, Z के अधिकतम तथा न्यूनतम मान प्रकट करते हैं।

(3) (i) जब सुसगत क्षेत्र परिबद्ध होता है, तो M तथा m, क्रमश:, Z के अधिकतम तथा न्यूनतम मान होते हैं।

(ii) सुसंगत क्षेत्र के अपरिबद्ध होने की स्थिति में:

(a) M, Z का अधिकतम मान होता है, यदि $ax + by > M$ द्वारा निर्धारित खुले अर्ध-तल का सुसंगत क्षेत्र के साथ कोई भी बिंदु उभयनिष्ठ न हो। अन्यथा Z का कोई भी अधिकतम मान नहीं होता।

(b) इसी प्रकार, m Z का न्यूनतम मान होता है, यदि $ax + by < m$ द्वारा निर्धारित खुले अर्ध-तल का सुसंगत क्षेत्र के साथ कोई भी बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है। अन्यथा Z का कोई भी न्यूनतम मान नहीं होता।

12.1.12 *बहु इष्टतम बिंदु* यदि सुसंगत क्षेत्र के दो कोनीय बिंदुओं पर एक ही प्रकार के इष्टतम हल हैं, अर्थात्, दोनों ही बिंदुओं पर समान अधिकतम या न्यूनतम मान प्राप्त होते हैं, तो इन दोनों बिंदुओं को मिलाने वाले रेखा-खंड के किसी भी बिंदु पर समान प्रकार का इष्टतम हल होता है।

12.2 हल किए हुए उदाहरण

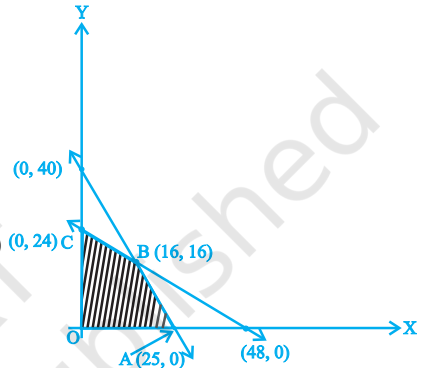
लघु उत्तरीय

उदाहरण 1 $Z = 4x + 3y$ का अधिकतम मान निर्धारित कीजिए, यदि LPP का सुसंगत क्षेत्र आकृति 12.1 में प्रदर्शित है।

हल सुसंगत क्षेत्र परिबद्ध है। इसलिए Z का अधिकतम मान सुसंगत क्षेत्र के किसी कोनीय बिंदु पर होगा। आकृति 12.1.

कोनीय बिंदु	Z का मान
O, (0, 0)	4 (0) + 3 (0) = 0
A (25, 0)	4 (25) + 3 (0) = 100
B (16, 16)	4 (16) + 3 (16) = **112** ← (अधिकतम)
C (0, 24)	4 (0) + 3 (24) = 72

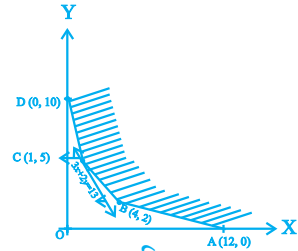
अत: Z का अधिकतम मान 112 है।

Y
(0, 40)
(0, 24) C
B (16, 16)
O
A (25, 0)
(48, 0)
X

आकृति 12.1

उदाहरण 2 $Z = 3x + 2y$ का न्यूनतम मान (यदि कोई है) निर्धारित कीजिए, यदि LPP का सुसंगत क्षेत्र आकृति 12.2 में प्रदर्शित किया गया है।

हल सुसंगत क्षेत्र (R) अपरिबद्ध है। अत: Z के न्यूनतम मान का अस्तित्व हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है। यदि उसका अस्तित्व है, तो वह किसी कोनीय बिंदु पर ही होगा (आकृति 12.2)

कोनीय बिंदु	Z का मान
A, (12, 0)	3 (12) + 2 (0) = 36
B (4, 2)	3 (4) + 2 (2) = 16
C (1, 5)	3 (1) + 2 (5) = **13** ← (न्यूनतम)
D (0, 10)	3 (0) + 2 (10) = 20

Y
D (0, 10)
C (1, 5)
3x+2y=13
B (4, 2)
O
A (12, 0)
X

आकृति 12.2

हम $3x + 2y < 13$ का आरेख खींचते हैं। हम देखते हैं कि $3x + 2y < 13$ द्वारा निर्धारित खुले अर्ध-तल तथा R में कोई उभयनिष्ठ बिंदु नहीं है। अत: लघुत्तम मान 13, Z का न्यूनतम मान है।

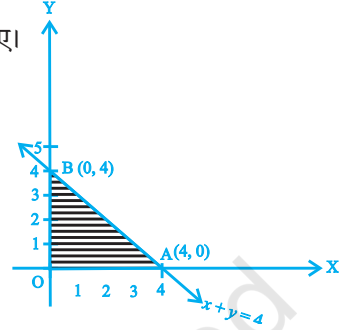
उदाहरण 3 निम्नलिखित LPP को आरेखीय विधि से हल कीजिए:

$Z = 2x + 3y$ का, व्यवरोधों $x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$ के अंतर्गत, अधिकतमीकरण कीजिए।

हल आकृति 12.3 में व्यवरोधों के निकाय $x \geq 0, y \geq 0$ तथा $x + y \leq 4$ द्वारा निर्धारित छायांकित क्षेत्र (OAB) सुसंगत क्षेत्र है।

सुसंगत क्षेत्र OAB परिबद्ध है, अतः अधिकतम मान सुसंगत क्षेत्र के किसी कोनीय बिंदु पर होगा। O(0, 0), A (4, 0) तथा B (0, 4) कोनीय बिंदु हैं।

इन कोनीय बिंदुओं में से प्रत्येक पर Z का मान ज्ञात कीजिए।

कोनीय बिंदु	Z का मान
0, (0, 0)	2 (0) + 3 (0) = 0
A (4, 0)	2 (4) + 3 (0) = 8
B (0, 4)	2 (0) + 3 (4) = **12** ← आकृति 12.3

आकृति 12.3

अतः Z का अधिकतम मान 12 है, जो बिंदु (0, 4) पर है।

उदाहरण 4 एक निर्माण कंपनी दो प्रकार के टेलीविज़न सेट बनाती है। एक काला-सफेद तथा दूसरा रंगीन। कंपनी के पास प्रति सप्ताह अधिकतम 300 सेट तैयार करने के साधन हैं। एक काला-सफेद सेट बनाने में 1800 रु तथा एक रंगीन सेट बनाने में 2700 रु लगते हैं। कंपनी टेलीविज़न सेट बनाने में प्रति सप्ताह 648000 रु से अधिक खर्च नहीं कर सकती है। यदि कंपनी प्रत्येक काले-सफेद सेट पर 510 रु तथा प्रत्येक रंगीन सेट पर 675 रु का लाभ अर्जित करती है। तो प्रत्येक प्रकार के कितने सेट निर्मित किए जाने चाहिए, जिससे उसे अधिकतम लाभ हो इस समस्या का एक LPP के रूप में सूत्रण कीजिए, दिया हुआ है कि उद्देश्य लाभ का अधिकतमीकरण करना है।

हल मान लीजिए कि x तथा y , क्रमशः प्रति सप्ताह बनने वाले काले-सफ़ेद सेटों तथा रंगीन सेटों की संख्या निरूपित करते हैं। अतः

$$x \geq 0, y \geq 0$$

क्योंकि कंपनी प्रति सप्ताह अधिकतम 300 सेट बना सकती है, इसलिए

$$x + y \leq 300$$

सेटों के निर्माण करने में साप्ताहिक मूल्य (रु में) $1800x + 2700y$ है तथा कंपनी 648000 रु तक खर्च कर सकती है। इसलिए,

$$1800x + 2700y \leq 648000, \text{ अर्थात्, } 2x + 3y \leq 720$$

x काले-सफेद सेटों तथा y रंगीन सेटों पर कुल लाभ $(510x + 675y)$ रु होता है। मान लीजिए कि $Z = 510x + 675y$ यही उद्देश्य फलन है।

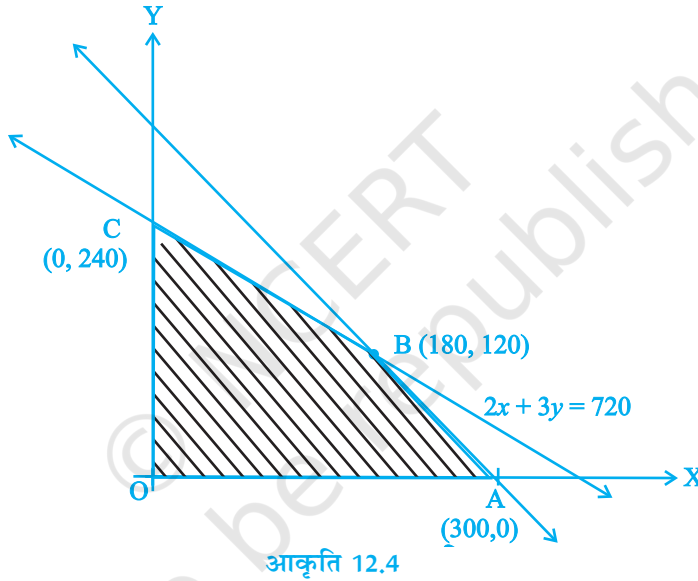
अतः समस्या का गणितीय सूत्रीकरण निम्नलिखित है:

$Z = 510x + 675y$ का निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत अधिकतमीकरण कीजिए

$$x+y \le 300$$
$$2x+3y \le 720$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 5 उदाहरण 4 पर ध्यान दीजिए। LPP को हल कीजिए।

हल समस्या नीचे दी हुई है।

आकृति 12.4

$Z = 510x + 675y$ का निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत अधिकतमीकरण कीजिए।

$$x+y \le 300$$
$$2x+3y \le 720$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

सुसंगत क्षेत्र OABC आकृति 12.4 में प्रदर्शित है।

क्योंकि सुसंगत क्षेत्र परिबद्ध है, इसलिए Z का अधिकतम मान OBC के किसी कोनीय बिंदु पर ही होगा:

कोनीय बिंदु	Z का मान
O (0, 0)	510 (0) + 675 (0) = 0
A (300, 0)	510 (300) + 675 (0) = 153000
B (180, 120)	510 (180) + 675 (120) = **172800** ← अधिकतम
C (0, 240)	510 (0) + 675 (240) = 162000

अतः अधिकतम Z, बिंदु (180, 120) पर 172800 है, अर्थात, कंपनी को अधिकतम लाभ पाने के लिए 180 काले-सफेद सेट तथा 120 रंगीन सेट बनाने चाहिये।

उदाहरण 6 $Z = 3x + 5y$ का नीचे दिए व्यवरोधों के अंतर्गत न्यूनतमीकरण कीजिए:

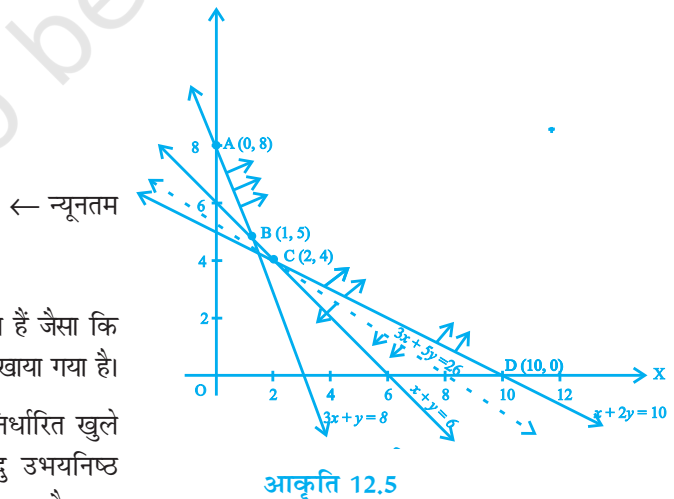
$$x + 2y \geq 10$$
$$x + y \geq 6$$
$$3x + y \geq 8$$
$$x, y \geq 0$$

हल हम पहले $x + 2y = 10, x + y = 6, 3x + y = 8$ के आरेख खींचते हैं। आकृति 12.5 में छायांकित क्षेत्र ABCD उपर्युक्त व्यवरोधों द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र (R) है। सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है। इसलिए Z का न्यूनतम मान हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है। यदि न्यूनतम मान है, तो वह किसी कोनीय बिंदु पर होगा।

कोणीय बिंदु	Z का मान
A (0, 8)	40
B (1, 5)	28
C (2, 4)	**26** ← न्यूनतम
D (10, 0)	30

हम $3x + 5y < 26$ का आरेख खींचते हैं जैसा कि आकृति 12.5 में बिंदुकित रेखा द्वारा दिखाया गया है।

हम देखते हैं $3x + 5y < 26$ द्वारा निर्धारित खुले अर्ध-तल तथा R में कोई भी बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है। अतः, 26, Z का न्यूनतम मान है।

आकृति 12.5

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

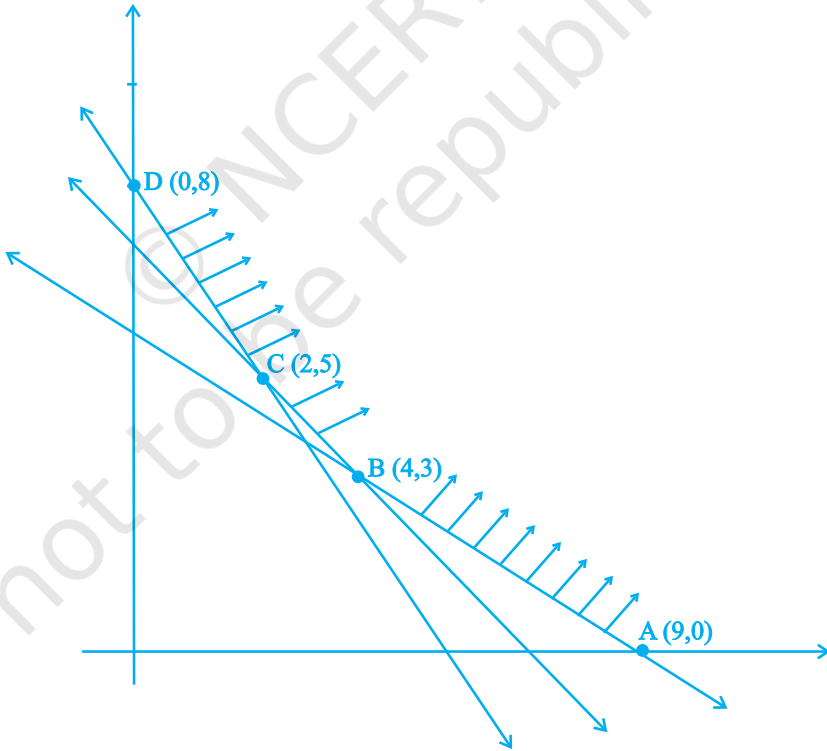
उदाहरण 7 तथा 8 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

उदाहरण 7 रैखिक व्यवरोधों के एक निकाय द्वारा निर्धारित, किसी सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिंदु (0, 10), (5, 5), (15, 15), (0, 20) हैं। मान लीजिए कि $Z = px + qy$, जहाँ $p, q > 0$. p तथा q पर लगने वाला वह प्रतिबंध, जिससे Z का अधिकतम मान (15, 15) तथा (0, 20) दोनों ही बिंदुओं पर प्राप्त हो, तब

(A) $p = q$ (B) $p = 2q$ (C) $q = 2p$ (D) $q = 3p$

हल सही उत्तर (D) है। क्योंकि तभी (15, 15) तथा (0, 20) पर Z का अधिकतम मान प्राप्त होगा।

उदाहरण 8 किसी LPP का सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) आकृति 12.6 में प्रदर्शित किया गया है। $Z = 4x + 3y$ का न्यूनतम मान किस बिंदु पर होगा?

(A) (0, 8) (B) (2, 5) (C) (4, 3) (D) (9, 0)

हल सही उत्तर (B) है।

आकृति 12.6

उदाहरण 9 तथा 10 प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

उदाहरण 9 किसी LPP में, वह रैखिक फलन, जिसका अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण करना होता है, एक रैखिक ___________ फलन कहलाता है।

हल उद्देश्य

उदाहरण 10 किसी LPP के सभी रैखिक व्यवरोधों द्वारा निर्धारित उभयनिष्ठ क्षेत्र एक ________ क्षेत्र कहलाता है।

हल सुसंगत

बतलाइए कि उदाहरण 11 तथा 12 के कथन सत्य हैं या असत्य–

उदाहरण 11 यदि किसी रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत क्षेत्र (R) परिबद्ध है, तो उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का R में अधिकतम तथा न्यूनतम दोनों ही मान होते हैं।

हल सत्य

उदाहरण 12 किसी रैखिक प्रोग्रामन समस्या के उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का न्यूनतम मान सदैव किसी एक ही कोनीय बिंदु पर प्राप्त होता है।

हल असत्य। न्यूनतम मान सुसंगत क्षेत्र के एक से अधिक कोनीय बिंदुओं पर भी प्राप्त हो सकता है।

12.3 प्रश्नावली

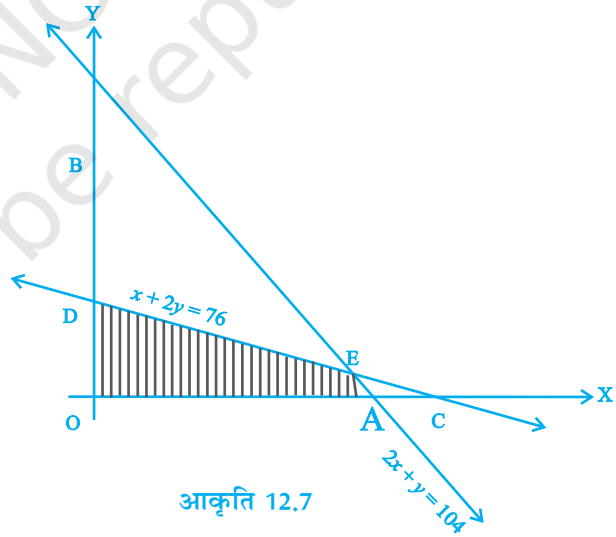
लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

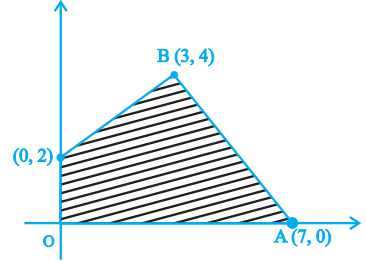
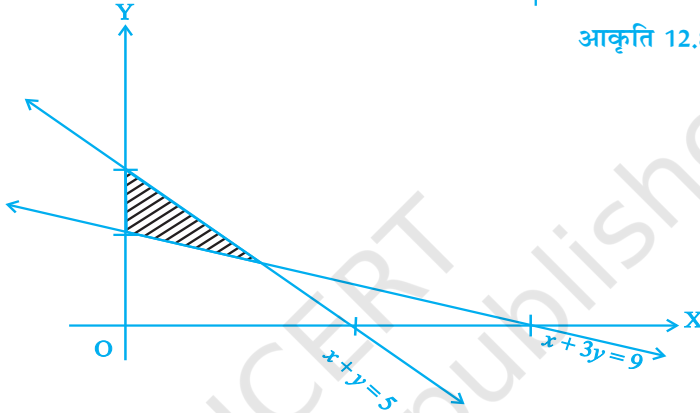
1. व्यवरोधों $2x + y \le 6, x \le 2, x \ge 0, y \ge 0$. के अंतर्गत $Z = 11x + 7y$ का अधिकतम मान निर्धारित कीजिए।

2. व्यवरोधों $x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0$. के अंतर्गत $Z = 3x + 4y$ का अधिकतमीकरण कीजिए।

3. व्यवरोधों $x \le 3, \quad y \le 2, x \ge 0, y \ge 0$ के अंतर्गत फलन $Z = 11x + 7y$ का अधिकतमीकरण कीजिए।

आकृति 12.7

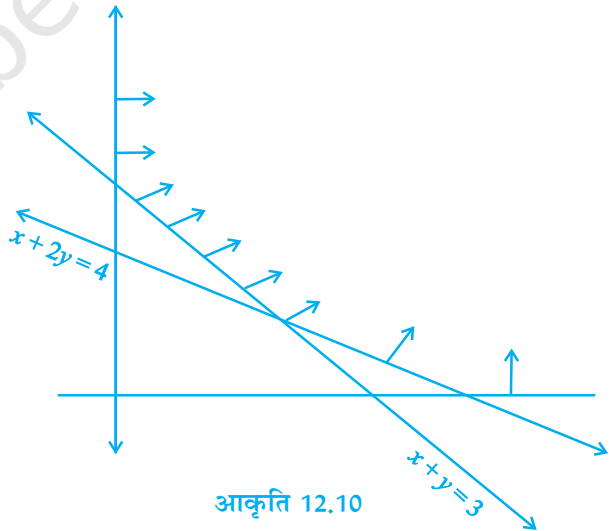
4. व्यवरोधों $x + y \le 7, 2x - 3y + 6 \ge 0, x \ge 0, y \ge 0$ के अंतर्गत $Z = 13x - 15y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए।

5. $Z = 3x + 4y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए, यदि LPP का सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) आकृति 12.7 में प्रदर्शित है।

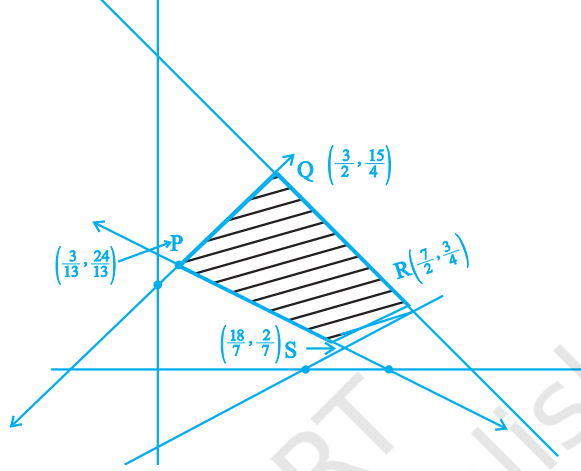
6. किसी LPP का सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) आकृति 12.8 में प्रदर्शित है। $Z = 5x + 7y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.8

आकृति 12.9

आकृति 12.9

7. किसी LPP का सुसंगत क्षेत्र आकृति 12.9 में प्रदर्शित है। $Z = 11x + 7y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

8. उपर्युक्त प्रश्न संख्या 7 पर ध्यान दीजिए। Z का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

9. किसी LPP का सुसंगत क्षेत्र आकृति 12.10 में प्रदर्शित है। इस क्षेत्र के प्रत्येक कोनीय बिंदु पर $Z = 4x + y$ का मान निकालिए। Z का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए, यदि उसका अस्तित्व है।

आकृति 12.10

10. आकृति 12.11 में एक LPP का सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) प्रदर्शित है। $Z = x + 2y$ का अधिकतम तथा न्यूनतम मान निकालिए।

आकृति 12.11

11. एक इलेक्ट्रानिक परिपथ के निर्माता के पास 200 प्रतिरोधक (resistors), 120 ट्रांजिस्टर तथा 150 संधारित्र (capacitors) का स्टाक है तथा उसे A और B दो प्रकार के परिपथ का उत्पादन करना है। A प्रकार के परिपथ में 20 प्रतिरोधकों, 10 ट्रांजिस्टर तथा 10 संधारित्रों की आवश्यकता पड़ती है। B प्रकार के परिपथ में 10 प्रतिरोधकों, 20 ट्रांजिस्टरों तथा 30 संधारित्रों की आवश्यकता पड़ती है। यदि प्रत्येक A प्रकार के परिपथ पर लाभ 50 रु तथा प्रत्येक B प्रकार के परिपथ पर लाभ 60 रु होता है, तो इस समस्या का एक LPP के रूप में सूत्रण कीजिए ताकि निर्माता अपने लाभ का अधिकतमीकरण कर सके।

12. एक फर्म को बड़ी वैनों, जिनमें से प्रत्येक 200 पैकेज तथा छोटी वैनों, जिनमें से प्रत्येक 80 पैकेज ढो सकती है के उपयोग द्वारा, 1200 पकेज ढोना है। प्रत्येक बड़ी वैन को लगाने पर 400 रु तथा प्रत्येक छोटी वैन को लगाने पर 200 रु खर्च होते हैं। इस कार्य के लिए 3000 रु से अधिक खर्च नहीं किए जा सकते हैं तथा बड़ी वैन की संख्या छोटी वैन की संख्या से अधिक नहीं हो सकती है। इस समस्या का एक LPP के रूप में सूत्रण कीजिए, यदि यह दिया हुआ है कि उद्देश्य कुल लागत का न्यूनतमीकरण करना है।

13. एक कंपनी A तथा B, दो प्रकार के पेंचों का उत्पादन करती है। सभी पेंचों को एक चूड़ी डालने वाली मशीन तथा एक खाँचा मशीन से होकर गुजरना पड़ता है। A प्रकार के पेंचों के एक बक्स को चूड़ी डालने की मशीन के 2 मिनट प्रयोग की तथा खाँचा मशीन के प्रयोग की 3 मिनट की आवश्यकता पड़ती है। B प्रकार के पेंचों के एक बक्स को चूड़ी डालने की मशीन के प्रयोग की

8 मिनट तथा खाँचा मशीन के प्रयोग की 2 मिनट की आवश्यकता पड़ती है। प्रत्येक मशीन एक सप्ताह में 60 घंटे के लिए उपलब्ध है।

इन पेंचों को बेचने पर कंपनी को A प्रकार के पेंचों पर 100 रु प्रति बक्स तथा B प्रकार के पेंचों पर 170 रु प्रति बक्स लाभ प्राप्त होता है।

इस समस्या का एक LPP के रूप में सूत्रण कीजिए, दिया हुआ है कि उद्देश्य लाभ का अधि कतमीकरण करना है।

14. एक कंपनी A तथा B दो प्रकार के स्वेटरों का उत्पादन करती है। A प्रकार के एक स्वेटर बनाने में 360 रु तथा B प्रकार के एक स्वेटर बनाने में 120 रु खर्च होते है। कंपनी प्रतिदिन अधिक से अधिक 300 स्वेटर बना सकती है तथा अधिकतम 72000 रु खर्च कर सकती है। B प्रकार के स्वेटरों की संख्या A प्रकार के स्वेटरों की संख्या से 100 से अधिक नहीं हो सकती है। प्रत्येक B प्रकार के स्वेटर पर 120 रु लाभ अर्जित करती है। कंपनी के कुल लाभ का अधिकतमीकरण करने के लिए इस समस्या का एक LPP के रूप में सूत्रण कीजिए।

15. एक व्यक्ति अपनी मोटरसाइकिल को 50 km/h की रफ्तार से चलाता है। उसे पेट्रोल पर 2 रु प्रति किलोमीटर खर्च करने पड़ते हैं। यदि वह 80 km/h की तेज रफ्तार से चलाता है, तो पेट्रोल का खर्चबढ़ कर 3 रु प्रति किलोमीटर हो जाता है। उसके पास पेट्रोल पर खर्च करने के लिए अधि क से अधिक 120 रु है तथा 1 घंटे का समय है। वह, उस अधिकतम दूरी को ज्ञात करना चाहता है, जो वह तय कर सकता है।

इस समस्या को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में व्यक्त कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

16. प्रश्न संख्या 11 पर ध्यान दीजिए। निर्माता को कितने A प्रकार के तथा कितने B प्रकार के परिपथ उत्पादित करने चाहिए, जिससे उसका लाभ अधिकतम हो? अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए।

17. प्रश्न संख्या 12 पर ध्यान दीजिए। न्यूनतम लागत क्या होगी?

18. प्रश्न संख्या 13 पर ध्यान दीजिए। रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए तथा निर्माता (कंपनी) का अधिकतम लाभ ज्ञात कीजिए।

19. प्रश्न संख्या 14 पर ध्यान दीजिए। कंपनी को प्रतिदिन, प्रत्येक प्रकार के कितने-कितने स्वेटर बनाने चाहिए जिससे अधिकतम लाभ हो? अधिकतम लाभ कितना है?

20. प्रश्न संख्या 15 पर ध्यान दीजिए। वह अधिकतम दूरी ज्ञात कीजिए जिसे व्यक्ति तय कर सकता है।

21. व्यवरोधों $x + 4y \leq 8, 2x + 3y \leq 12, 3x + y \leq 9, x \geq 0, y \geq 0.$ के आधीन $Z = x + y$ का अधिकतमीकरण कीजिए।

22. एक निर्माता बाइक के दो मॉडल – मॉडल X तथा मॉडल Y बनाता है/मॉडल X की Y की इकाई को बनाने में 10 जन–घंटे लगते हैं। प्रति सप्ताह कुल 450 जन–घंटे उपलब्ध हैं। विपणन तथा रख–रखाव पर खर्च मॉडल X की प्रत्येक इकाई तथा मॉडल Y की प्रत्येक इकाई पर क्रमशः 2000 रु तथा 1000 रु हैं। इस कार्य के लिए प्रति सप्ताह कुल उपलब्ध धन 80000 रु है। मॉडल X तथा मॉडल Y की प्रत्येक इकाई पर लाभ क्रमशः 1000 रु तथा 500 रु है।

निर्माता को प्रत्येक मॉडल की कितनी बाइक बनानी चाहिए जिससे अधिकतम लाभ मिले? अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए।

23. एक व्यक्ति अपने दैनिक आहार के संपूरण के लिए कुछ X तथा कुछ Y टिकियाँ (tablets) खाना चाहता है। X तथा Y टिकियों में लौह, कैल्सियम तथा विटामिन के अंश (मिली ग्राम प्रति टिकिया) नीचे दिए गए हैं:

टिकियाँ	लौह	कैल्सियम	विटामिन
X	6	3	2
Y	2	3	4

उस व्यक्ति को कम से कम 18 mg लौह तत्व, 21 mg कैल्सियम तथा 16 mg विटामिन की आवश्यकता है। प्रत्येक X तथा Y टिकियों का मूल्य क्रमशः 2 रु तथा 1 रु है। अपनी उपर्युक्त आवश्यकता की पूर्ति के लिए उस व्यक्ति को प्रत्येक प्रकार की कितनी टिकियाँ खानी चाहिए जिससे मूल्य न्यूनतम रहे?

24. एक कंपनी परिकलित्रों (Calculators) के तीन मॉडल A, B तथा C का निर्माण फैक्ट्री I तथा फैक्ट्री II में करती है। कंपनी के पास कम से कम मॉडल A के 6400 परिकलित्रों, मॉडल B के 4000 परिकलित्रों तथा मॉडल C के 4800 परिकलित्रों की आपूर्ति का आदेश है। फैक्ट्री I में प्रतिदिन मॉडल A के 50, मॉडल B के 50 तथा मॉडल C के 30 परिकलित्र निर्मित होते हैं। फैक्ट्री II में प्रतिदिन मॉडल C के 40 परिकलित्र निर्मित होते हैं। फैक्ट्री I तथा फैक्ट्री II को चलाने में प्रतिदिन क्रमशः 12000 रु तथा 15000 खर्च होते हैं। प्रत्येक फैक्ट्री को चालू रखने के दिनों की संख्या ज्ञात कीजिए ताकि लागत मूल्य कम से कम हो तथा फिर भी माँग पूरी हो सके।

25. व्यवरोधों: $x - 2y \leq 0$; $-3x + y \leq 4$, $x - y \leq 6$, $x, y \geq 0$ के अंतर्गत $Z = 3x - 4y$ का अधिकतमीकरण तथा न्यूनतमीकरण कीजिए।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 26 से 34 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

26. व्यवरोधों के एक निकाय द्वारा निर्धारित किसी सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिंदु (0, 0), (0, 40), (20, 40), (60, 20), (60, 0) हैं। उद्देश्य फलन $Z = 4x + 3y$ है।

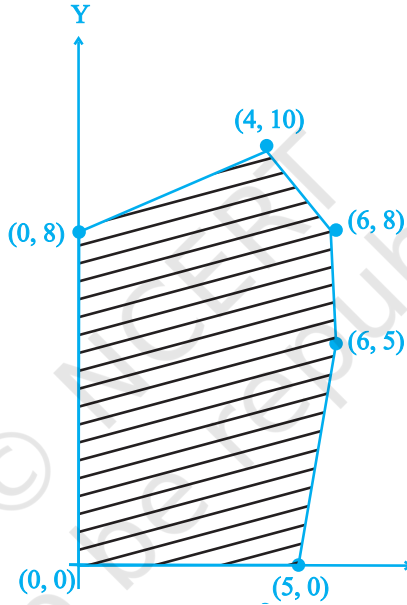
स्तंभ A तथा स्तंभ B की राशियों की तुलना कीजिए।

स्तम्भ A	**स्तम्भ B**
Z का अधिकतम मान	325

(A) स्तंभ A की राशि अधिक है

(B) स्तंभ B की राशि अधिक है

(C) दोनों राशियाँ समान हैं

(D) प्रदत्त सूचनाओं के आधार पर दोनों राशियों का परस्पर संबंध निर्धारित नहीं किया जा सकता है।

आकृति 12.12

27. आकृति 12.12 में किसी LPP का सुसंगत हल प्रदर्शित है। मान लीजिए कि $Z = 3x - 4y$, उद्देश्य फलन है। Z का अधिकतम मान किस बिंदु पर है?

(A) (0, 0) (B) (0, 8) (C) (5, 0) (D) (4, 10) पर है।

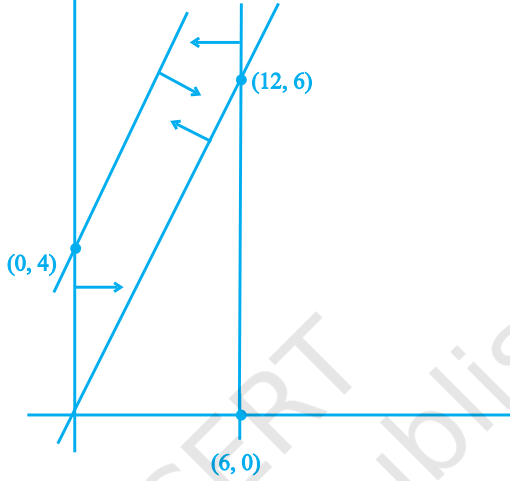
28. प्रश्न संख्या 27 पर ध्यान दीजिए। Z का अधिकतम मान किस बिंदु पर है?

(A) (5, 0) (B) (6, 5) (C) 6, 8) (D) (4, 10)

29. प्रश्न संख्या 27 पर ध्यान दीजिए। Z का अधिकतम मान + Z का न्यूनतम मान बराबर है:

(A) 13 (B) 1 (C) – 13 (D) – 17 के बराबर है।

30. आकृति 12.13 में एक LPP का सुसंगत क्षेत्र प्रदर्शित है। मान लीजिए कि $F = 3x - 4y$ उद्देश्य फलन है। F का अधिकतम मान होगा?

(A) 0 (B) 8 (C) 12 (D) – 18

आकृति 12.13

31. प्रश्न संख्या 30 पर ध्यान दीजिए। F का न्यूनतम मान है:

(A) 0 (B) – 16 (C) 12 (D) का अस्तित्व नहीं हैं।

32. किसी LPP के सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिंदु (0, 2), (3, 0), (6, 0), (6, 8) तथा (0, 5) हैं। मान लीजिए कि $F = 4x + 6y$ उद्देश्य फलन है। F का न्यूनतम मान किस बिंदु पर है?

(A) केवल (0, 2) पर

(B) केवल (3, 0) पर

(C) (0, 2) तथा (3, 0) बिंदुओं को मिलाने वाले रेखांखण्ड के मध्य बिंदु पर

(D) (0, 2) तथा (3, 0) बिंदुओं को मिलाने वाले रेखांखण्ड के किसी भी बिंदु पर

33. प्रश्न संख्या 32 पर ध्यान दीजिए। F का अधिकतम मान –F का न्यूनतम मान बराबर है:

(A) 60 (B) 48 (C) 42 (D) 18

34. किसी रैखिक व्यवरोधों के निकाय द्वारा निर्धारित एक सुंसगत क्षेत्र के कोनीय बिंदु (0, 3), (1, 1) तथा (3, 0) हैं। मान लीजिए कि $Z = px+qy$, (जहाँ $p, q > 0$) उद्देश्य फलन है। p तथा

q पर लगने वाला वह प्रतिबंध, जिससे Z का न्यूनतम मान (3, 0) तथा (1, 1) पर प्राप्त होगा:

(A) $p = 2q$ (B) $p = \frac{q}{2}$ (C) $p = 3q$ (D) $p = q$

प्रश्न संख्या 35 से 42 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए-

35. किसी LPP में असमिकाओं या चरों पर लगने वाले प्रतिबंधों को __________कहते हैं।

36. किसी LPP में उद्देश्य फलन सदैव __________ होता है।

37. यदि किसी LPP में सुसंगत क्षेत्र __________ है, तो उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ के इष्टतम मान का आस्तित्व हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है।

38. किसी LPP में, यदि उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का सुसंगत क्षेत्र के दो कोनीय बिंदुओं पर समान अधिकतम मान हो, तो इन बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड के सभी बिंदुओं पर समान __________ मान प्राप्त होता है।

39. रैखिक असमिकाओं के एक निकाय द्वारा निर्धारित किसी सुसंगत क्षेत्र को __________ कहते हैं, यदि उस क्षेत्र को एक वृत्त के भीतर परिबद्ध किया जा सकता है।

40. किसी सुसंगत क्षेत्र कोनीय बिंदु उस क्षेत्र का वह बिंदु है जो उसकी दो परिसीमा रेखाओं का __________ है।

41. किसी LPP का सुसंगत क्षेत्र सदैव एक __________ बहुभुज होता है।

बताइए कि प्रश्न संख्या 42 से 45 तक में दिए हुए कथन सत्य हैं या असत्य?

42. यदि किसी LPP का सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है, तो उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ के अधिकतम मान या न्यूनतम मान का अस्तित्व हो सकता है या नहीं भी हो सकता है।

43. किसी LPP के उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का अधिकतम मान सदैव सुसंगत क्षेत्र के केवल एक कोणीय बिंदु पर प्राप्त होता है।

44. किसी LPP के उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का न्यूनतम मान सदैव 0 होता है, यदि मूल बिंदु उसके सुसंगत क्षेत्र का एक कोनीय बिंदु है।

45. किसी LPP में, उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का अधिकतम मान सदैव परिमित होता है।